INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
9 martie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A IX-A

1. O mulțime nevidă $A \subset \mathbb{N}^*$ se va numi "**perfectă**" dacă suma elementelor sale este egală cu pătratul numărului ei de elemente.

a) Verificați că mulțimea $M = \{1;3;5;7;9\}$ este perfectă.

b) Determinați toate mulțimile perfecte cu trei elemente.

c) Demonstrați că pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ există cel puțin o mulțime perfectă cu n elemente.

Soluție:

a) $1+3+5+7+9=5^2$ 2p

b) $a+b+c=9 \Rightarrow M$ este una din mulțimile $\{1;2;6\}$, $\{1;3;5\}$, $\{2;3;4\}$ 3p

c) Spre exemplu $M = \{1;\ 3;\ 5;\ ...;\ 2n-1\}$ 2p

2. Un număr de 51 insecte minuscule sunt aşezate în interiorul unei plăci pătrate de latură 1.

a) Demonstrați că o placă pătrată de latură $\frac{1}{5}$ poate fi acoperită cu un disc de rază $\frac{1}{7}$.

b) Demonstrați că există cel puțin 3 insecte ce pot fi acoperite cu un disc de rază $\frac{1}{7}$.

Soluție:

a) Un pătrat de latură $\frac{1}{5}$ are diagonala $\frac{\sqrt{2}}{5}$ 2p

$\frac{\sqrt{2}}{5} < \frac{2}{7}$ 2p

b) Un pătrat de latură 1 conține 25 pătrate de latură $\frac{1}{5}$ 2p

$51:25=2$, rest 1 şi finalizare 1p

3. Considerăm un triunghi ABC şi punctele M, N, P pe laturile (AB), (BC), respectiv (CA) astfel încât $AM = BN = CP$. Notăm cu T centrul de greutate al triunghiului MNP.

a) Demonstrați că $AB \cdot \overrightarrow{AM} = AM \cdot \overrightarrow{AB}$.

b) Demonstrați că $\overrightarrow{MT} + \overrightarrow{NT} + \overrightarrow{PT} = \vec{0}$.

c) Dacă, în plus, $AB \cdot \overrightarrow{AT} + BC \cdot \overrightarrow{BT} + CA \cdot \overrightarrow{CT} = \vec{0}$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Soluție:

a) $M \in (AB) \Rightarrow AB \cdot \overrightarrow{AM}$ şi $AM \cdot \overrightarrow{AB}$ au aceaşi direcție ………………………………………….. 1p

acelaşi sens ………………………………………………………………………........ 1p

aceeaşi măsură $AM \cdot AB$ ……………………………………………………………………1p

b) Justifică $\overrightarrow{MT} + \overrightarrow{NT} + \overrightarrow{PT} = \vec{0}$ ………………………………………………………………… 2p

c)

$$AB \cdot \overrightarrow{AT} + BC \cdot \overrightarrow{BT} + CA \cdot \overrightarrow{CT} = AB \cdot \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MT}\right) + BC \cdot \left(\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NT}\right) + CA \cdot \left(\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PT}\right) =$$

$$= \left(AM \cdot \overrightarrow{AB} + BN \cdot \overrightarrow{BC} + CP \cdot \overrightarrow{CA}\right) + AB \cdot \overrightarrow{MT} + BC \cdot \overrightarrow{NT} + CA \cdot \overrightarrow{PT} =$$

$$= AM \cdot \underbrace{\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right)}_{\vec{0}} + AB \cdot \overrightarrow{MT} + BC \cdot \overrightarrow{NT} + CA \cdot \overrightarrow{PT} = \vec{0}$$ ……………………………………..1p

Din $AB \cdot \overrightarrow{MT} + BC \cdot \overrightarrow{NT} + CA \cdot \overrightarrow{PT} = \vec{0} \Rightarrow AB \cdot \overrightarrow{MT} + BC \cdot \overrightarrow{NT} + CA \cdot \left(-\overrightarrow{MT} - \overrightarrow{NT}\right) = \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow (AB - CA) \cdot \overrightarrow{MT} + (BC - CA) \cdot \overrightarrow{NT} = \vec{0}$.

Cum $\overrightarrow{MT}$ şi $\overrightarrow{NT}$ sunt necoliniari $\Rightarrow AB = BC = CA$ ……………………………………………1p

4. Considerăm că fiecare punct din plan este colorat cu exact una din culorile *roşu*, *verde*, *galben* sau *albastru* şi cel puțin patru puncte sunt de culori diferite.

a) Demonstrați că există cel puțin trei puncte necoliniare şi colorate diferit.

b) Demonstrați că există cel puțin trei puncte distincte coliniare şi colorate diferit.

Soluție:

a) Dacă pe o dreaptă sunt toate punctele de aceeaşi culoare, alegem exterior două puncte de alte două culori şi găsim 3 puncte necoliniare colorate distinct ……………………………………………1p

Dacă pe o dreaptă sunt doar două culori alegem în exterior un punct de altă culoare …………..1p

Dacă pe o dreaptă sunt doar trei culori alegem în exterior un punct de a patra culoare …………1p

Dacă pe o dreaptă sunt patru culori alegem în exterior un punct de o culoare oarecare ………...1p

b) Dacă pe o dreaptă avem doar două culori va exista un patrulater cu varfurile de culori distincte ……..............……………………………………………………………………………..…2p

şi considerăm intersecția diagonalelor lui împreună cu două vârfuri opuse ……………………..1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
9 martie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. Fie funcția $f:\mathbb{C}\setminus\{i\}\to\mathbb{C}$, $f(z)=\dfrac{z+i}{z-i}$

a) Demonstrați că $f(2)+f(-2)$ este număr real.

b) Demonstrați că $|f(z)|=1$ dacă şi numai dacă $z\in\mathbb{R}$.

c) Dacă $z_0=1+i$ şi pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ avem $z_n=f(z_{n-1})$, aflați z_{2013}.

Soluție:

a) $f(2)+f(-2)=\dfrac{6}{5}\in\mathbb{R}$ 2p

b) $z=a+bi\Rightarrow|f(z)|=1\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow z=a\in\mathbb{R}$ 3p

c) $z_0=1+i$, $z_1=1+2i$, $z_2=2+i$, $z_3=1+i=z_0$ 1p

$z_{2013}=z_0=1+i$ 1p

2. Doi angajați au inițial acelaşi salariu. Datorită crizei, primului angajat i se reduce salariul cu 25%, după care firma angajatoare revine şi îi aplică mărire salarială tot cu 25%. Din motive asemănătoare şi celui de al doilea angajat i se aplică inițial o reducere salarială de 25% iar apoi o majorare de 10% urmată de o nouă majorare de 15%. Care dintre cei doi salariați va avea la final un salariu mai mare?

Soluție:

Dacă salariul inițial a fost x lei atunci:

- primul angajat are modificările salariale (1) $x\to\dfrac{3}{4}x$ şi (2) $\dfrac{3}{4}x\to\dfrac{15}{16}x$ 3p
- al doilea angajat are modificările salariale (1) $x\to\dfrac{3}{4}x$, (2) $\dfrac{3}{4}x\to\dfrac{33}{40}x$, (2) $\dfrac{33}{4o}x\to\dfrac{759}{800}x$ ... 3p

Cum $\dfrac{759}{800}>\dfrac{15}{16}$, al doilea angajat va avea salariu mai mare 1p

3. Fie $f:[0;\infty)\to\mathbb{R}$ cu $f(0)=1$ şi $f(x+y)=f(\lg(xy)),(\forall)\ x>0$ şi $y>0$. Demonstrați că:

a) pentru orice $t\ge2$ există $x>0$ astfel încât $t=x+\dfrac{1}{x}$;

b) $f(t)=1$, pentru orice $t\ge2$;

c) $f(10^t+1)=f(t)$, pentru orice $t\ge0$;

d) Determinați funcția f.

Soluție:

a) $x=\dfrac{t\pm\sqrt{t^2-4}}{2}>0$ 2p

b) $t\geq 2\Rightarrow f(t)=f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=f\left(\lg\left(x\cdot\dfrac{1}{x}\right)\right)=1$ 2p

c) $x=10^t,\ y=1\Rightarrow f\left(10^t+1\right)=f(t),\ t\geq 0$ 2p

d) $10^t+1\geq 2\Rightarrow f(t)=f\left(10^t+1\right)=1$ 1p

4. Un zid în formă de dreptunghi cu înălțimea de 2 metri se acoperă cu plăci dreptunghiulare având fiecare lungimea de 2 metri şi lățimea de 1 metru. Notăm cu a_n numărul de moduri în care putem aşeza plăcile când zidul are lungimea de n metri, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Demonstrați că $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$ şi $a_4=5$.

b) Demonstrați că $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$, oricare ar fi $n\geq 3$.

c) Aflați în câte moduri putem placa zidul dacă acesta are lungimea de 10 metri.

Soluție:

a) $n=1\Rightarrow$ arată $a_1=1$ 0,5p

$n=2\Rightarrow$ arată $a_2=2$ 0,5p

$n=3\Rightarrow$ arată $a_3=3$ 1p

$n=4\Rightarrow$ arată $a_4=5$ 2p

b) Arată $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$, oricare ar fi $n\geq 3$ 2p

c) Determină $a_{10}=89$ 1p

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XI-A

1. Fie matricile $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

a) Determinaţi $a, b\in\mathbb{R}$ încât $A^2=a\cdot A+b\cdot I_3$

b) Demonstraţi că $(I_3+A)\left(I_3-\frac{1}{4}\cdot A\right)=I_3$

c) Demonstraţi că matricea $B=I_3+A$ este inversabilă şi calculaţi B^{-1}.

<u>Soluţie:</u>

a) $A^2=3\cdot A\Rightarrow a=3,\ b=0$ ……………………………………………………………2p

b) Arată $(I_3+A)\left(I_3-\frac{1}{4}\cdot A\right)=I_3$……………………………………………………………3p

c) Din b) (I_3+A) inversabilă ……………………………………………………………1p

$(I_3+A)^{-1}=I_3-\frac{1}{4}\cdot A$ ……………………………………………………………1p

2. Doi prieteni, Andrei şi Vasile, măsoară fiecare distanţa de acasă până la şcoală. Distanţa măsurată de Andrei este egală cu x km iar cea măsurată de Vasile este egală cu y km. Ştiind că există $a,b,c\in\{1;2;3\}$, nu neapărat distincte dar astfel încât se verifică sistemul

$$\begin{cases} x+2y=4\\ ax+\ \ y=5\\ cx+3y=b+6\end{cases}$$

determinaţi a, b, c şi distanţele x şi y.

<u>Soluţie:</u>

În cazul $a=1\Rightarrow x=6,\ y=-1$ dar y este distanţă deci nu poate fi număr negativ …………………..1p

În cazul $a=2\Rightarrow x=2,\ y=1$…………………………………………………………………..1p

şi atunci $2c+3=b+6$ …………………………………………………………………..1p

$\Rightarrow b=1,\ c=2$ sau $b=c=3$…………………………………………………………………1p

În cazul $a=3\Rightarrow x=\frac{6}{5},\ y=\frac{7}{5}$ ……………………………………………………………….2p

şi $6c=5b+9$ (imposibil)………………………………………………………………………..1p

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$.

a) Demonstrați că pentru un $a\in\mathbb{R}$ arbitrar ales, $\lim\limits_{x\to\infty} f(ax)=\begin{cases}0, & \text{dacă } a<0\\ 1, & \text{dacă } a=0\\ \infty, & \text{dacă } a>0\end{cases}$

b) Calculați $\lim\limits_{x\to-\infty} f(ax)$, $a\in\mathbb{R}$.

c) Determinați numerele $a, b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$ încât pentru fiecare $x\in\mathbb{R}$ să aibă loc $f(ax)=a\cdot f(x)+b$.

Soluție:

a) Justifică $\lim\limits_{x\to\infty} e^{ax}=\begin{cases}0, & \text{dacă } a<0\\ 1, & \text{dacă } a=0\\ \infty, & \text{dacă } a>0\end{cases}$ 2p

b) Calculează $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{ax}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-ax}=\begin{cases}\infty, & \text{dacă } a<0\\ 1, & \text{dacă } a=0\\ 0, & \text{dacă } a>0\end{cases}$ 2p

c) Din $f(ax)=a\cdot f(x)+b$, $(\forall)x\in\mathbb{R}\Rightarrow e^{ax}=a\cdot e^x+b$

Pentru $a=1\Rightarrow b=0$ şi egalitatea se verifică 1p

Pentru $a<0$, $\lim\limits_{x\to\infty} e^{ax}=a\cdot\lim\limits_{x\to\infty} e^x+b\Rightarrow 0=-\infty$ (fals)...1p

Pentru $a>0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{ax}=a\cdot\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+b\Rightarrow 0=b$

Din $e^{ax}=a\cdot e^x$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$, pentru $x=0\Rightarrow a=1$ 1p

4. O echipă de cercetători constată că starea calorică a unei anumite substanțe aflată în studiu se modifică în timp după legea $T(t)=\sqrt{t^2+a\cdot t+b}-c\cdot t+5$, unde $a, b, c\in\mathbb{R}$ sunt constante ce trebuie determinate şi în care $T(t)$ este temperatura, măsurată în grade, înregistrată la momentul $t\geq 0$ ce reprezintă numărul de secunde scurs de la începutul experimentului.

a) Determinați $a, b, c\in\mathbb{R}$ ştiind că $T(1)=7$ şi $\lim\limits_{t\to\infty} T(t)=8$.

b) Cu a, b, c astfel determinați, stabiliți dacă e posibil ca la un moment al experimentului temperatura substanței să fie 0^0.

Soluție:

a) $T(1)=7\Rightarrow\sqrt{a+b+1}=c+2$ 1p

$\lim\limits_{t\to\infty} T(t)=8\Rightarrow\lim\limits_{t\to\infty}\left(\sqrt{t^2+a\cdot t+b}-c\cdot t\right)=3$ 1p

Este necesar ca $c>0$ 1p

Obține $c=1$, $a=6$ 2p

Din $T(1)=7\Rightarrow b=2$ 1p

b) $T(t)=0\Rightarrow\sqrt{t^2+6t+2}=t-5\Rightarrow t=\dfrac{23}{16}$ dar $\dfrac{23}{16}-5<0$, deci nu este posibil ca temperatura substanței să fie 0^0 în nici un moment al experimentului 1p

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XII-A

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+e}$. Se cere:

a) Demonstrați că $f(x)+f(1-x)=1$, $(\forall)\, x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați primitiva F a funcției f care verifică $F(0)=0$.

c) Calculați $\int_0^1 f(x)\cdot\sin(\pi x)\,dx$

<u>Soluție:</u>

a) Verifică $f(x)+f(1-x)=1$ 2p

b) $F(x)\in\int f(x)\,dx=\dfrac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+e\right)+C$ 2p

$F(0)=0\Rightarrow C=-\dfrac{1}{2}\cdot\ln(1+e)$ 1p

c) Fie $I=\int_0^1 f(x)\cdot\sin(\pi x)\,dx$ şi $x=1-t\Rightarrow I=\int_0^1 f(1-x)\cdot\sin(\pi x)\,dx$ 1p

$\Rightarrow 2I=\int_0^1\sin(\pi x)\,dx=\dfrac{2}{\pi}$, deci $I=\dfrac{1}{\pi}$ 1p

2. Pe $G=(0;+\infty)$ se consideră legea de compoziție notată ”$*$” şi care verifică următoarele două condiții:

(i) $(x+1)*x=1$, $(\forall)\ x\in G$

(ii) $(x\cdot y)*z=x\cdot(y*z)$, $(\forall)\ x,\ y,\ z\in G$

Se cere:

a) Demonstrați că $x*y=\dfrac{x}{y+1}$, $(\forall)\ x,\ y\in G$

b) Studiați dacă $(G;*)$ este structură asociativă;

c) Studiați dacă $(G;*)$ admite element neutru.

Soluție:

a) Alegând $y = z+1$, din (ii) $\Rightarrow \left[x\cdot(z+1)\right]*z = x\cdot\left[(z+1)*z\right]$ şi cum , din (i), $(z+1)*z=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[x\cdot(z+1)\right]*z = x$. În $\left[x\cdot(z+1)\right]*z = x$ punând $x=\dfrac{t}{z+1} \Rightarrow t*z = x$,

deci $t*z=\dfrac{t}{z+1}$, $(\forall)\ t,\ z\in G$ ……………………………………………………….2p

b) $(1*2)*3=\dfrac{1}{12}$ şi $1*(2*3)=\dfrac{2}{3}$, deci $(G;\ *)$ nu este structură asociativă……………………….3p

c) Fie $e\in G$ element neutru, atunci $1*e=e*1=1 \iff \dfrac{1}{e+1}=\dfrac{e}{2}=1$ (fals), deci $(G;\ *)$ nu admite element neutru. ……………………………………………………………………………2p

3. Un mobil se deplasează pe o traiectorie după legea de mişcare $s:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$ cu $s(0)=0$, în care $s(t)$ reprezintă spațiul parcurs de la momentul inițial $t_0=0$ pînă la momentul $t\geq 0$. Ştiind că accelerația sa la momentul $t\geq 0$ este $a(t)=t\cdot e^t$ şi viteza inițială este $v(0)=a>0$, aflați legea de mişcare.
Notă: Este cunoscut că cele trei elemente principale ale unei mişcări, respectiv funcțiile ce descriu spațiul parcurs $s(t)$, viteza momentană $v(t)$ şi accelerația momentană $a(t)$, verifică $s'(t)=v(t)$ şi $v'(t)=a(t)$.

Soluție:

Din $v'(t)=a(t) \Rightarrow v(t)\in\int a(t)\ dt=\int t\cdot e^t dt=(t-1)\cdot e^t+C_1$ ……………………………………….2p

Din
$s'(t)=v(t)\Rightarrow s(t)\in\int v(t)\ dt=\int\left[(t-1)\cdot e^t+C_1\right]dt=(t-2)\cdot e^t+C_1\cdot t+C_2$ ……………………….2p

unde C_1 şi C_2 sunt constante reale determinabile din condițiile inițiale.

$s(0)=0\Rightarrow C_2=2$ ……………………………………………………………………………..1p

$v(0)=a\Rightarrow C_1=1+a$ ……………………………………………………………………………. 1p

Deci $s(t)=(t-2)\cdot e^t+(1+a)\cdot t+2$ ………………………………………………………….. 1p

4. Andrei, despre care nicicum nu se poate spune că i-ar fi dragi calculele, s-a hotărât să simplifice toată matematica prin introducerea următoarelor reguli de ”adunare” şi ”înmulțire”: *rezultatul oricărei adunări sau înmulțiri a două numere naturale este, după el, egal cu ultima cifră a rezultatului care s-ar obține după regulile obişnuite*. Astfel, *notând prin* ”$\oplus$” şi ”$\odot$” *adunarea şi înmulțirea după regulile lui Andrei*, vom avea, de pildă, $15\oplus 28=3$ şi $26\odot 39=4$. Se cere:
a) Calculați, după regula lui Andrei, $1\oplus 2\oplus 3\oplus\ldots\oplus 10$ şi $1\oplus 2\oplus 3\oplus\ldots\oplus 20$.
b) Demonstrați că $1\oplus 2\oplus 3\oplus\ldots\oplus 2013=1$.
c) Considerând $A=\{0;1;2;3;\ldots;9\}$, demonstrați că $(A;\oplus;\odot)$ este inel comutativ.

Soluție:

a) Determină $1\oplus 2\oplus 3\oplus\ldots\oplus 9\oplus 10=5$ ……………………………………..…………………….. 2p
$1\oplus 2\oplus 3\oplus\ldots\oplus 19\oplus 20=0$ ………………………………………………………..………….. 2p

b) Constată că $f:\mathbb{N}^*\to\overline{0;9}$, $f(n)=1\oplus 2\oplus 3\oplus\ldots\oplus n$ este periodică cu perioada principală $T=20$………………………………………………………………………………….... 1p
Determină $1\oplus 2\oplus 3\oplus\ldots\oplus 2013=1$.

c) Demonstrează că $(A;\oplus;\odot)$ este structură izomorfă cu inelul $(\mathbb{Z}_{10};+;\cdot)$ sau verifică proprietățile ce definesc structura de inel comutativ ……………………...2p